

# EL USO DE GEOGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN, APLICACIONES EN EL DE VACIADO DE TANQUES

**Ma. del Carmen Cornejo Serrano**

Instituto Tecnológico de Celaya

carmencornejoserrano@gmail.com

**Eloísa Bernardett Villalobos Oliver**

Instituto Tecnológico de Celaya

eloisa.villalobos@itcelaya.edu.mx

**Juan Manuel Tabares Martínez**

Instituto Tecnológico de Celaya

**Juan Pablo Soledad Sánchez**

Instituto Tecnológico de Celaya

**José Eduardo Rodríguez Luján**

Instituto Tecnológico de Celaya

## RESUMEN

En la actualidad el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) son indispensables para la adquisición y reforzamiento de conceptos matemáticos, mediante estas herramientas informáticas es posible potenciar la enseñanza de las ciencias exactas, como es el caso del uso del software GeoGebra, el cual permite que la enseñanza de las matemáticas se apoye en procesos visuales. Se debe entonces aprovechar el hecho de que un alto porcentaje de los alumnos cuenta con el estilo

visual de aprendizaje, para impulsar el uso de estas tecnologías y lograr la mejor comprensión de temas abstractos, consiguiendo el aprendizaje significativo de conceptos básicos de matemáticas.

Este artículo muestra como el uso de programas desarrollados con el software GeoGebra, que incluyen conceptos matemáticos básicos, permiten resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, orientadas al caso particular de solución de problemas de vaciado de tanques de diferentes geometrías, mostrando los efectos en las variables de salida al ajustar los diferentes parámetros de diseño de los recipientes.

**PALABRAS CLAVES:** tic, geogebra, ecuaciones diferenciales, vaciado de tanques.

## 1. INTRODUCCIÓN

El uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas resulta importante en la resolución de problemas y en la forma en la que los estudiantes adquieren los conocimientos matemáticos. El estudiante al interactuar con herramientas tecnológicas puede crear diferentes representaciones de los conceptos para lograr así una mejor comprensión de los mismos. Los docentes tienen la obligación de fomentar el uso de las TIC, y lograr con ello que los alumnos lleven a cabo una reflexión más profunda al momento de resolver un problema de aplicación.

El uso de la tecnología puede llegar a ser una herramienta poderosa para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertos temas y a su vez sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o incluso problemas, lo que constituye un aspecto importante en el aprendizaje de las matemáticas (Barrera y Santos, 2001). Es por esto que el diseñar sus propios programas o applets con el apoyo de GeoGebra les permitirá tener un enfoque más crítico en la resolución de problemas prácticos.

Generalmente en la enseñanza de las matemáticas, al resolver un problema, se tiende a tener una solución logarítmica o mecanizada de los pasos a seguir en la solución del mismo, la cual es propuesta generalmente por los libros o los profesores, ocasionando automatismos en los alumnos y provocando que no reflexione o profundice los conceptos para obtener una comprensión de los problemas en su totalidad (Flores,

1997). Este modo poco creativo de aprendizaje provoca desinterés por las matemáticas, es por ello, que al emplear un software como GeoGebra, se cuenta con un vínculo para relacionar los conceptos teóricos y la visualización gráfica de sus aplicaciones, generando motivación en los alumnos para adquirir conocimientos mediante él.

El uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas ofrece un conjunto de herramientas que permiten el manejo de expresiones aritméticas, soluciones de ecuaciones no lineales, soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, gráficas de funciones, solución de ecuaciones diferenciales, entre otras, que permiten trabajar con ambientes visuales y comandos sencillos. Todas las herramientas de solución de este software apoyan y contribuyen para que el alumno logre adquirir sus conocimientos mediante una estrategia de solución para resolver algún problema.

La tecnología no sustituye la labor del docente, el profesor solo es una guía para el alumno y decide sobre cuando es óptimo hacer uso de las herramientas tecnológicas para la resolución de problemas y cuándo no (NCTM, 2000, p.26).

Las computadoras liberan a los estudiantes de la actividad aritmética (Balacheff y Kaput), lo que le permite centrarse en los aspectos algebraicos y la estructura del problema. Flugstad (2004) ha diseñado tres etapas de desarrollo para describir el proceso donde los estudiantes interactúan con las herramientas tecnológicas como es el caso de un applets de GeoGebra:

- Conocimiento básico de los comandos o funcionalidades del software.
- Desarrollo de modelos simples.
- Juzgar el uso de las herramientas para dar solución a un problema dado.

Las representaciones deberían ser tratadas como un elemento esencial para apoyar la comprensión del estudiante sobre los conceptos y relaciones matemáticas, comunicar acercamientos matemáticos, argumentos y conocimientos de sí mismo y de otros; reconociendo las conexiones entre los conceptos matemáticos y aplicar las matemáticas a situaciones de problemas reales a través de la modelación (NCTM, 2000, p. 67).

Santos (2001), argumenta que en la representación de una situación o problema matemático por medio de la computadora, los estudiantes tienen que acceder y utilizar una serie de recursos y propiedades matemáticas que les permita seleccionar comandos y distintas maneras de lograr la representación. Por ejemplo, para lograr la representación visual del vaciado de un tanque el estudiante debe de conocer o modelar la ecuación diferencial que represente el nivel del fluido en el recipiente según los parámetros y tiempos de operación del tanque.

## 2. METODOLOGÍA

Se muestra a continuación la metodología utilizada para diseñar un applets que presente el vaciado de un tanque semiesférico, y que muestre la gráfica de la altura del tanque en cualquier instante. Los parámetros de entrada que podrá modificar el usuario son respecto a las características del tanque y a los tiempos de operación del tanque.

Se utiliza el método numérico de Runge Kutta de cuarto orden, para resolver la ecuación diferencial que muestra la variación de la altura del nivel del líquido contenido en un tanque, a través del tiempo. La variación de la altura depende de alguna manera de la geometría del tanque, del tiempo transcurrido y del área del orificio de salida del fluido situado al fondo del tanque. Se considera un recipiente con un fluido que inicialmente tiene una altura " $h$ ", donde el líquido fluye a través de un orificio de sección transversal conocida, el cual está ubicado en la base del tanque. Se desea establecer la altura de líquido en el tanque en cualquier instante " $t$ " y el tiempo que éste demora en vaciarse.

### 3.1 Uso del método de Runge Kutta de cuarto orden con GeoGebra.

Se utiliza el método de Runge Kutta de cuarto orden para resolver la ecuación diferencial que modela el vaciado de un tanque semiesférico, a través del tiempo, ver figura 1.

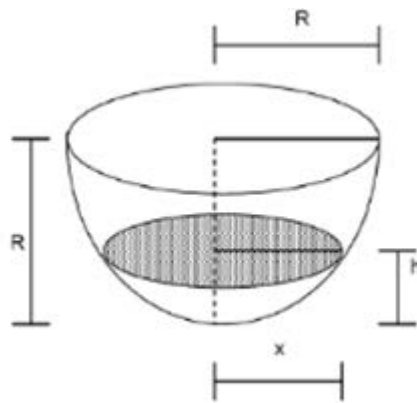


Fig. 1 Tanque semiesférico.

### 3.1.1 Obtención de la ecuación diferencial que representa el cambio de altura a través del tiempo

Sea  $h(t)$  la altura de líquido en el tanque en cualquier instante  $t$  y  $V(t)$  el volumen de líquido del tanque en ese instante. La velocidad del líquido que sale a través del orificio es

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Donde  $g$  es la gravedad. La ecuación (1) representa la velocidad que una gota del líquido adquiriría al caer libremente desde la superficie del agua hasta el agujero. En condiciones reales, hay que tomar en cuenta la contracción que sufre un chorro del líquido en un orificio, por lo que se tendrá

$$v = k\sqrt{2gh} \quad (2)$$

Donde  $k$  es el coeficiente de descarga comprendido entre 0 y 1 ( $0 < k < 1$ ). Según el Teorema de Torricelli, la razón con la que el líquido sale por el agujero (variación del volumen de líquido en el tanque respecto al tiempo) se puede expresar como el área del orificio de salida por la velocidad  $V$  del líquido, esto es

$$\frac{dV}{dt} = -A_0 v \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (3)

$$\frac{dV}{dt} = -A_0 k \sqrt{2gh} \quad (4)$$

Si  $A(h)$  denota el área de la sección transversal horizontal del tanque a la altura  $h(t)$ , correspondiente al área del espejo, se puede obtener la siguiente expresión que corresponde al volumen de líquido desalojado del tanque

$$\frac{dV}{dt} = A(h) \frac{dh}{dt} \quad (5)$$

Igualando las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -A_0 k \sqrt{2gh} \quad (6)$$

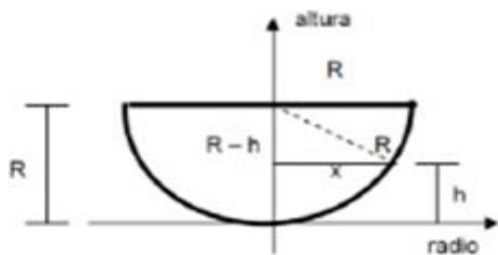
Como el radio del cilindro semiesférico es  $R$ , cuando el tanque se encuentra lleno entonces la altura inicial de líquido en el tanque es  $R$ , y la condición inicial es  $h(0) = R$ . El orificio de salida tiene radio  $r$ , por lo tanto, el área del orificio de salida está dada por la siguiente ecuación:

$$A_o = \pi r^2 \quad (7)$$

Las secciones transversales del tanque semiesférico, son circunferencias de radio variable, sea  $x$  el radio de la sección transversal a cualquier altura, entonces

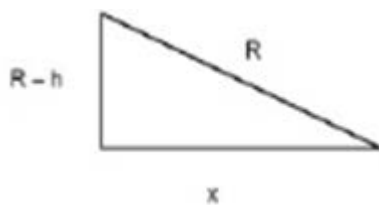
$$A(h) = \pi x^2 \quad (8)$$

Se establece la relación entre el radio  $x$  y la altura  $h$ , de tal forma que el área de la sección transversal quede expresada en función de la altura  $h$ . Observando el tanque de frente como una figura plana y ubicándolo en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (ver figura 2).



**Fig. 2 Relación de variables en el tanque semiesférico**

Se puede dibujar el siguiente triángulo rectángulo el cual tiene como base el radio  $x$ , altura  $R - h$ , e hipotenusa  $R$ ,



**Fig. 3 Triángulo rectángulo**

Aplicando el teorema de Pitágoras a este triángulo se obtiene

$$R^2 = x^2 + (R - h)^2 \quad (9)$$

$$R^2 = x^2 + R^2 - 2Rh + h^2 \quad (10)$$

$$x^2 = 2Rh - h^2 \quad (11)$$

Sustituyendo la ecuación (11) en la ecuación del área (8), obtenemos

$$A(h) = \pi(2Rh - h^2) \quad (12)$$

Al sustituir las ecuaciones (7) y (12) en la ecuación (6)

$$\pi(2Rh - h^2) dh = -\pi r^2 k \sqrt{2gh} dt \quad (13)$$

Reordenando la ecuación para resolverla por el método de Runge Kutta se tiene:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{kr^2\sqrt{2gh}}{h(2R-h)} \quad (14)$$

### 3.2 Protocolo de construcción (método de solución)

Pasos a seguir para los obtener los parámetros de operación del tanque y resolver la ecuación diferencial dada por la ecuación (14).

Se generan los deslizadores correspondientes a los parámetros y tiempos de operación del tanque, como se muestra en la figura 4.

#### 1. Parámetros de operación del tanque:

- Crear un deslizador para la altura inicial del tanque: altura<sub>inicial</sub>
- Crear un deslizador para el radio de la esfera en pies: radio<sub>inicial ft</sub>
- Crear un deslizador para el radio del orificio en pulgadas: radio<sub>orificio in</sub>
- Crear un deslizador para la constante del coeficiente de descarga de salida del orificio k<sub>orificio</sub>

#### 2. Tiempos de operación del tanque:

- Tiempo inicial del tanque: tiempo<sub>inicial</sub>
- Tiempo final del tanque: tiempo<sub>final</sub>
- Incremento del tiempo: tiempo<sub>incremento</sub>

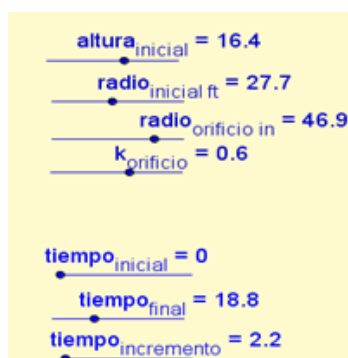


Fig. 4 Deslizadores de tiempos de operación y parámetros del tanque.

3. En la barra de entrada crea la función multivariable (ver figura 5), que corresponde al despeje de la pendiente de la ecuación diferencial, ecuación

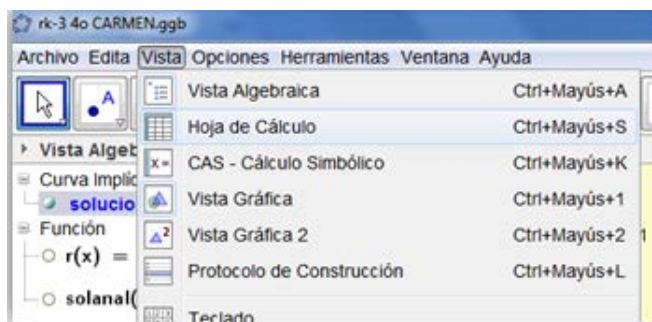


(14), la cual en términos de los deslizadores que se definieron en el paso 1 y 2 se introduce en la barra de entrada como :

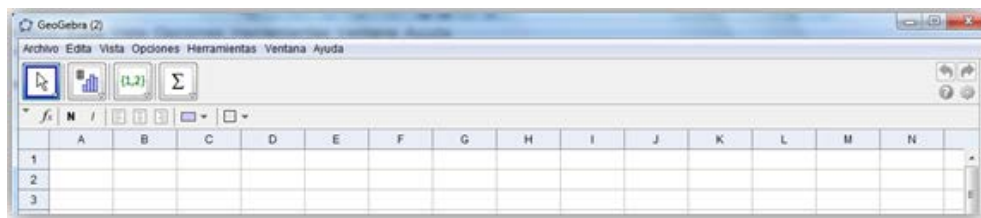
Entrada:  $f(x, y) = (-k_{\text{orificio}} (\text{radio}_{\text{orificio}})^2 / 12) y^{(1/2)} / (y (2\text{radio}_{\text{inicial}}^2 - y))$

**Fig. 5 Función multivariable, correspondiente a la ecuación (14).**

4. Abre la ventana de hoja de cálculo para programar las celdas del método de RK, como se muestra en la figura 6 y se despliega la pantalla de la figura 7.



**Fig. 6 Ventana para activar la hoja de cálculo.**



**Fig. 7 Hoja de cálculo de GeoGebra.**

5. La hoja de cálculo es similar a la de Excel, en cada una de las celdas programa las fórmulas tanto de la ecuación predictora de RK como de sus ecuaciones auxiliares. Enseguida genera en la celda C1 que contiene el valor del tamaño de paso que selecciones con el deslizador, dando la instrucción: `=tiempo incremento`, como se muestra en la figura 8.
6. Enseguida escribe en la fila 2 los encabezados del método de Runge Kutta, y en la fila 3 se programan.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	tiempo_incremento	0.4		No. It...	19	No. It. Redon...	19								
2	it	xi	yi	k1	xi+h/2	yi+hk1/2	k2	xi+h/2	yi+h...	k3	xi+h	yi+hk3	k4	yi+1	grafi...
3	0	0	14.7	-0.49	0.2		14.6	-0.49	0.2	14.6	-0.49	0.4	14.5	-0.5	14.5

Fig. 8 Encabezados y cálculos del método de Runge Kutta de cuarto orden.

La programación de las celdas anteriores se hace con las siguientes fórmulas, que corresponden al método de Runge Kutta de cuarto orden, como se muestra a continuación:

	A	B	C	D	E	F	G
1		tiempo_{incremento}	=tiempo_{incremento}				
2		It	xi	Yi	k1=f(xi,yi)	xi+h/2	yi+hk1/2
3		0	=tiempo_{inicial}	=altura_{inicial}	=f(C3,D3)	=C3+\$C\$1/2	=D3+\$C\$1*E3/2

...	H	I	J	K	L
1					
2	K2=f(x,y)	xi+h/2	yi+hk2/2	K3=f(xi,yi)	xi+h
3	=f(F3, G3)	=C3+\$C\$1/2	=D3+\$C\$1*H3 /2	=f(I3,J3)	=C3+\$C\$1

...	M	N	O	P
1				
2	yi+hk3	K4=f(x,y)	Yi+1=yi+(k1+2k2+2k3+k4)h/6	Gráfica solución
3	=D3+\$C\$1* K3	=f(L3,M3)	=D3+\$C\$1*(E3 + 2H3 + 2K3 + N3) / 6	Ver paso 11

**Nota:** Al programar cada celda cuida dejar fija la columna donde se encuentra el tamaño de paso \$C\$1, para que se mantenga constante al arrastrar las fórmulas en la hoja de cálculo.

Programar las celdas B4, C4 y D4, las cuales se utilizan para actualizar los valores del número de iteraciones, tiempo transcurrido y altura del nivel del fluido en el tanque como se muestra en la siguiente tabla.

	A	B	C	D	E	F	G
1		tiempo_{incremento}	=tiempo_{incremento}				
2		It	xi	Yi	k1=f(xi,yi)	xi+h/2	yi+hk1/2
3		0	=tiempo_{inicial}	=altura_{inicial}	...	...	...
4		=B3+1	=C3+\$C\$1	= O3			

- Llena las celdas E4 a O4 marcando las celdas E3 a O3 y arrastrándolas.
- Marca todas las celdas de la fila 4 y arrástralas hasta 200 cálculos. El proceso puede llevar unos minutos.
- Para graficar el punto de las condiciones iniciales te debes ubicar en la barra de entrada y escribir el punto ToHo definido de la siguiente manera:  
ToHo= (tiempo\_{inicial}, altura\_{inicial}), el cual se mostrará en la ventana gráfica.
- Para graficar los datos que corresponden a tiempo vs altura del nivel del fluido del tanque, en la celda E1 escribe No. Iteraciones y en la celda F1 escribe la fórmula

$$= (\text{tiempo}_{\text{final}} - \text{tiempo}_{\text{inicial}}) / \text{tiempo}_{\text{incremento}} \quad (15)$$

- En la celda G1 escribe No. It. Redondeadas y en la celda H1 escribe la fórmula:  
=Si[parteFraccionaria((tiempo\_{final} - tiempo\_{inicial}) / C1) ≠ 0, (tiempo\_{final} - tiempo\_{inicial}) / C1 - parteFraccionaria((tiempo\_{final} - tiempo\_{inicial}) / C1) + 1, (tiempo\_{final} - tiempo\_{inicial}) / C1] (16)

...	E	F	G	H
1	No. Iteraciones	=(tiempo_{final} - tiempo_{inicial})/tiempo_{incremento}	No. It. Redondeadas	Ver la ecuación (16)

- Programa la columna P, que corresponde a la gráfica de los segmentos de recta que forman la solución, la cual incluye una decisión lógica iniciando en la celda P3, ver figura 9. Arrastrar esta celda al resto de la columna P hasta 200 cálculos.

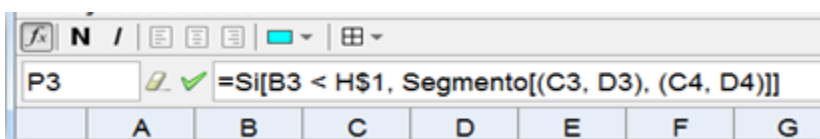


Fig. 9 Sintaxis de la fórmula que grafica los segmentos de la solución de la ecuación diferencial.

Para observar la gráfica de altura vs tiempo se puede dar valores a los diferentes deslizadores creados en el paso 1 y 2 a los valores que se muestran en la figura 10.

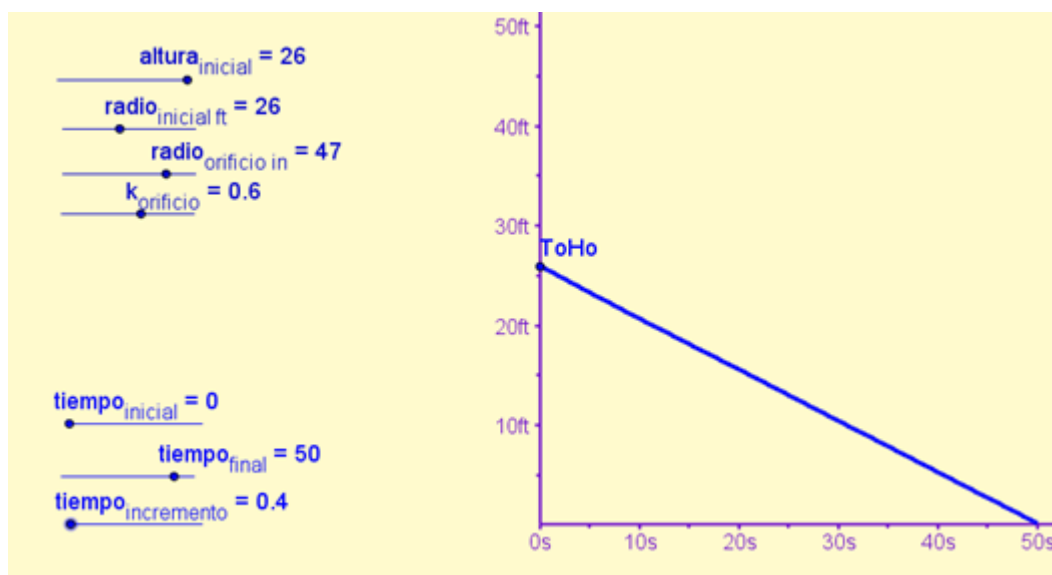
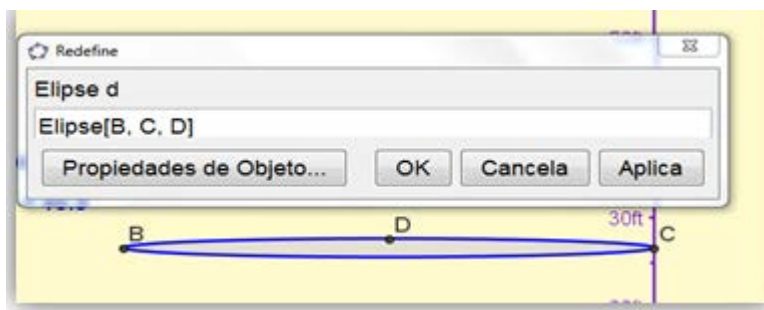


Fig.10 Grafica altura vs tiempo.

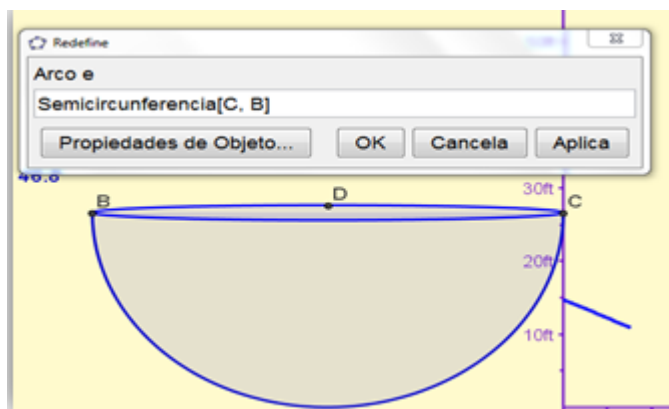
### Construcción del tanque semiesférico

13. En la vista gráfica crea 3 puntos, el punto B con coordenada  $(-\text{radio}_{\{\text{inicial ft}\}}, \text{radio}_{\{\text{inicial ft}\}})$ , el punto C con coordenada  $(0, \text{radio}_{\{\text{inicial ft}\}})$  y el punto D con coordenada  $(-\text{radio}_{\{\text{inicial ft}\}}, \text{radio}_{\{\text{inicial ft}\}} + 1)$ , para la generación de la elipse superior del tanque semiesférico implementando el comando Elipse [B, C, D], donde el



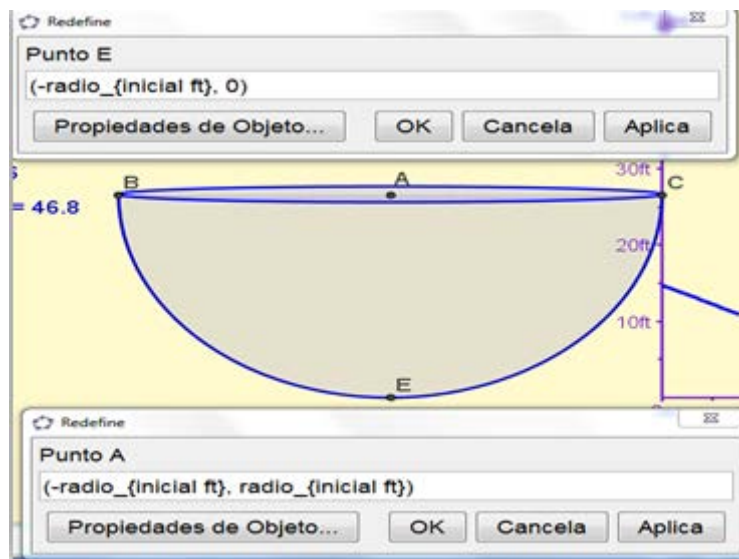
**Fig. 11** Elipse generada por los puntos B, C y D, la cual representa la parte superior del tanque semiesférico.

14. Construye la semicircunferencia del tanque semiesférico mediante el comando Semicircunferencia [C, B], donde C y B hacen referencia a los puntos que conforman el diámetro de la semiesfera, ver figura 12.



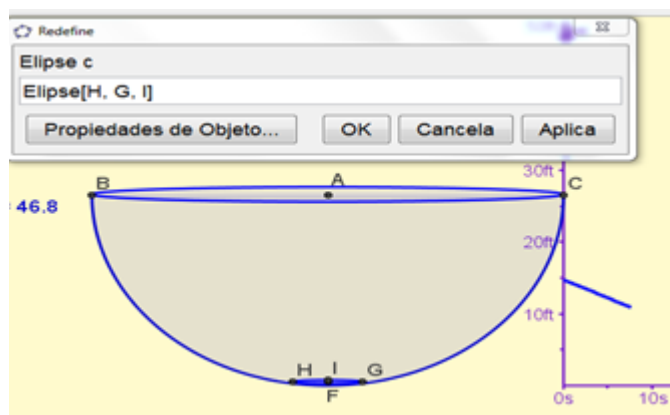
**Fig. 12** Semicircunferencia de la estructura del tanque semiesférico, creada mediante dos puntos extremos C y B.

15. Genera dos puntos A y E los cuales estarán situados en el centro de la semicircunferencia y en el punto medio de la elipse, con coordenadas  $(-radio_{\{inicial\} ft}, radio_{\{inicial\} ft})$  y  $(-radio_{\{inicial\} ft}, 0)$  respectivamente, sirven de base para posteriormente construir el orificio en el tanque y para la simulación del cambio de altura del fluido, ver figura 13.



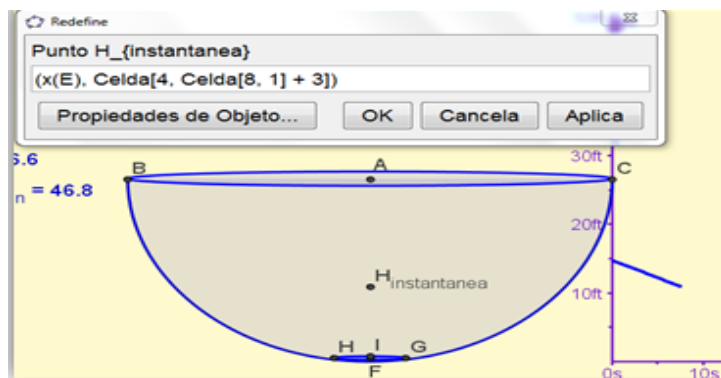
**Fig. 13** Generación de los puntos A y E situados en la parte media de la estructura semiesférica.

16. Crea cuatro puntos H, I, G y F, donde F tiene la coordenada  $(x(E), 0.5)$  para la generación de la elipse que representa el orificio en el tanque semiesférico mediante el comando `Elipse [H, G, I]`, donde el punto I con coordenada  $(x(E), 0.8)$  da razón a la amplitud de la elipse y los puntos H y G con coordenadas  $(x(F) - \text{radio}_{\text{orificio in}} \cdot 1 / 12, y(F))$  y  $(x(F) + \text{radio}_{\text{orificio in}} \cdot 1 / 12, y(F))$  respectivamente, son referentes al diámetro, ver figura 14.



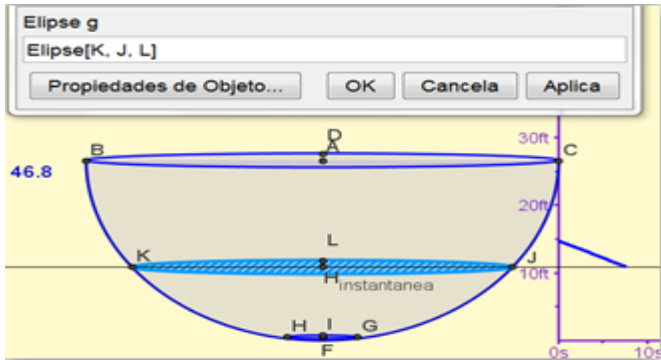
**Fig. 14** Elipse generada por los puntos H, G e I, la cual representa el orificio situado en la parte inferior del tanque para efectuar su vaciado.

17. Genera el punto  $H_{\text{instantánea}}$ , este punto da seguimiento al cambio de altura del fluido en el tanque, además su ubicación está dada mediante la coordenada  $(x(E), \text{Celda}[4, \text{Celda}[8, 1] + 3])$ , esta coordenada corresponde al nivel del fluido instantáneo por lo que está cambiando continuamente según el tiempo final que se seleccione con el deslizador  $t_{\text{final}}$ , ver figura 15.



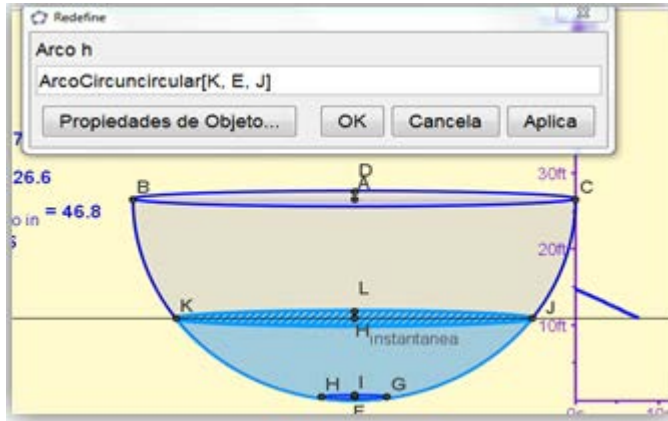
**Fig. 15** Punto  $H_{\text{instantánea}}$  que simula el cambio de altura del fluido durante el vaciado de tanque.

18. Crea una línea recta que pasa por el punto  $H_{\text{instantánea}}$  y que es perpendicular al eje de las ordenadas. La recta sirve de referencia para la visualización del espejo del líquido contenido en el tanque y se genera mediante el comando: Perpendicular [ $H_{\text{instantánea}}$ , Eje Y], ver figura 16.
19. Implementa el comando  $\text{Ellipse}[K, J, L]$ , donde el punto L con coordenada  $(x(H_{\text{instantánea}}), y(H_{\text{instantánea}}) + 1)$  da razón a la amplitud de la elipse y se sitúa tomando como referencia el punto medio en la elipse al punto  $H_{\text{instantánea}}$ , el cual se tomará como base para darle la amplitud deseada, los puntos K y J son los extremos del semieje mayor de la elipse y están situados en la intersección de la semicircunferencia y la recta generada en el punto anterior, además esta elipse se genera para mostrar la variación de volumen del fluido dentro del tanque, ver fig. 16.



**Fig. 16 Elipse creada en base a la recta y al punto H instantánea, generada para la simulación de vaciado de tanque.**

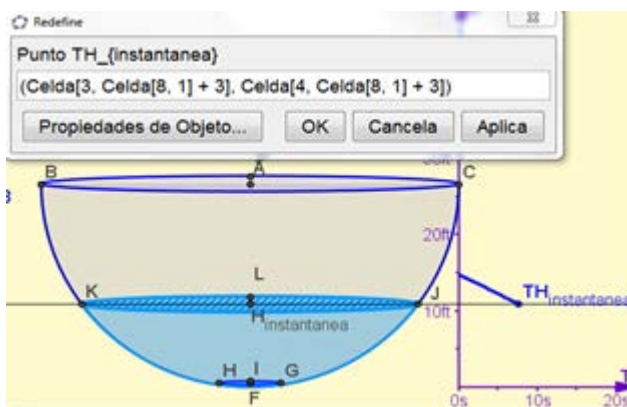
20. Para dar el efecto del recipiente con fluido, se hace mediante el comando `ArcoCircuncircular[K, E, J]`, donde los puntos K y J son los extremos del arco y el punto E es el punto medio en donde se genera el arco, ver figura 17.



**Fig. 17 Arco generado mediante los puntos K, J y E, cubre la superficie dentro del tanque ocupada por el fluido.**

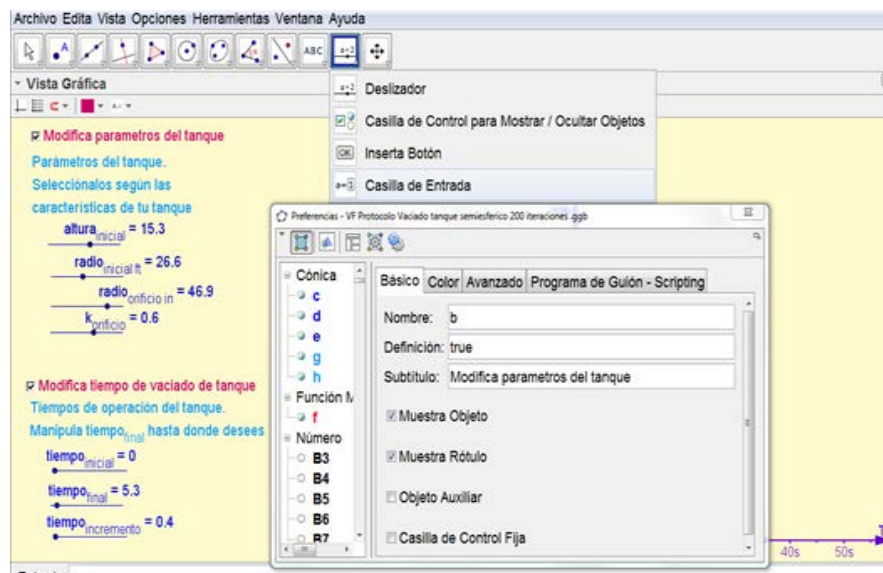
**21.** Crea el punto TH instantánea que hace referencia al tiempo transcurrido y al nivel del fluido en el tanque, las coordenadas para este punto están situadas en la última iteración generada por el método Runge Kutta en la hoja de cálculo que tiene como coordenada (Celda[3, Celda[8, 1] + 3], Celda[4, Celda[8, 1] + 3]), ver figura 18.





**Fig. 18 Punto TH<sub>instantanea</sub> el cual muestra el tiempo transcurrido y la altura en la gráfica de la solución numérica correspondiente al nivel del fluido en el vaciado de tanque.**

22. Mediante la herramienta de insertar texto genera el escrito que hace referencia a los deslizadores que controlan los parámetros del tanque y el tiempo de operación del mismo, además se utiliza la herramienta de casilla de control para mostrar u ocultar los deslizadores o parámetros con los que se desee trabajar según el vaciado de tanque ( ver fig. 19).



**Fig. 19 Texto y casillas de control para la manipulación de la visualización de los parámetros y tiempos de operación del tanque.**

23. Con la herramienta de insertar texto genera la etiqueta que hace referencia al tiempo transcurrido y que denota su valor numérico con la instrucción  $x(\text{TH}_{\{\text{instantánea}\}})$ , para la altura instantánea del fluido en el tanque se obtiene su valor con la instrucción  $y(\text{TH}_{\{\text{instantánea}\}})$ , también se calcula el volumen del tanque donde su valor numérico se calcula con la instrucción:  $\text{Volumen}_{\{\text{tanque}\}} = (\pi) (2 / 3) (\text{radio}_{\{\text{inicial ft}\}})^3$ , además se estima el volumen del fluido en el tanque calculando su valor numérico con la instrucción:  $\text{Volumen}_{\{\text{liquido}\}} = (y(\text{H}_{\{\text{instantánea}\}}))^2 \text{radio}_{\{\text{inicial ft}\}} - y(\text{H}_{\{\text{instantánea}\}})^3 / 3$ , ver figura 20.



**Fig. 20** Descripción mediante la herramienta de inserta texto del tiempo transcurrido, altura instantánea en el tanque, cálculo del volumen del tanque y volumen instantáneo del fluido.

24. Crea una casilla de entrada que permitirá modificar la ecuación diferencial a resolver, relacionala con la función multivariable  $f(x,y)$  que se generó en el paso 3 y como subtítulo de casilla coloca el nombre de  $dy/dx$ , ver figura 21.
25. Modifica la ecuación diferencial y las condiciones iniciales y observa los resultados.

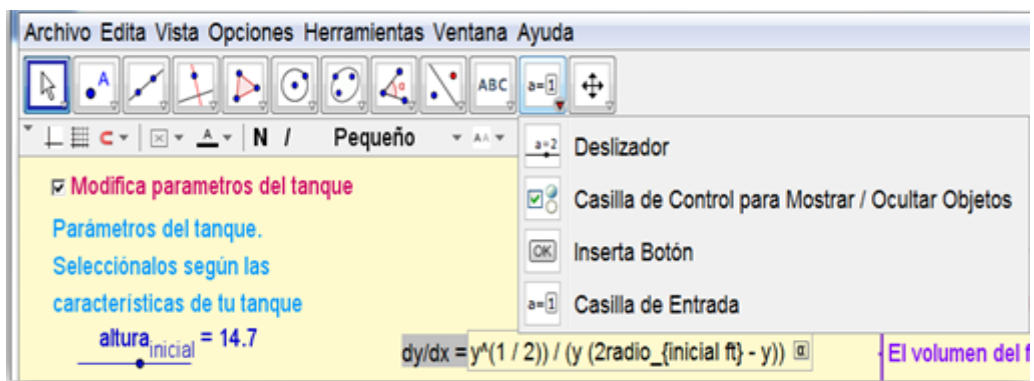


Fig. 21 Casilla de control empleada para modificar la función multivariable.

### 3. RESULTADOS

Se muestra a continuación el análisis de resultados en el tanque semiesférico diseñado, que opera bajo las siguientes condiciones: radio del tanque de 20 ft; el tanque esta inicialmente lleno de agua, en el fondo tiene un orificio de 94 in de diámetro ( $k= 0.6$ ). Se pide encontrar el tiempo para que la altura del tanque disminuya hasta 10 ft, ¿cuál es el volumen del fluido en el tanque en ese instante? y ¿cuál es el volumen inicial del fluido en el tanque?

#### 4.1 Solución mediante el applets de GeoGebra

- Selecciona los valores en los deslizadores de los parámetros y tiempos de operación del tanque propuestos en el problema, ver figura 22.
- Manipula el deslizador del tiempo final, hasta observar que se llegue a obtener el nivel del fluido deseado en el tanque, con una altura de 10ft, (figura 22).
- Con un tiempo final de 12.9 segundos la superficie en el tanque baja 10ft (figura 22).
- El volumen del fluido en el tanque después del tiempo transcurrido de 12.9 segundos es de 5239.14 ft<sup>3</sup> (figura 22).
- El volumen del tanque semiesférico es de 16755.16 ft<sup>3</sup> (figura 22).

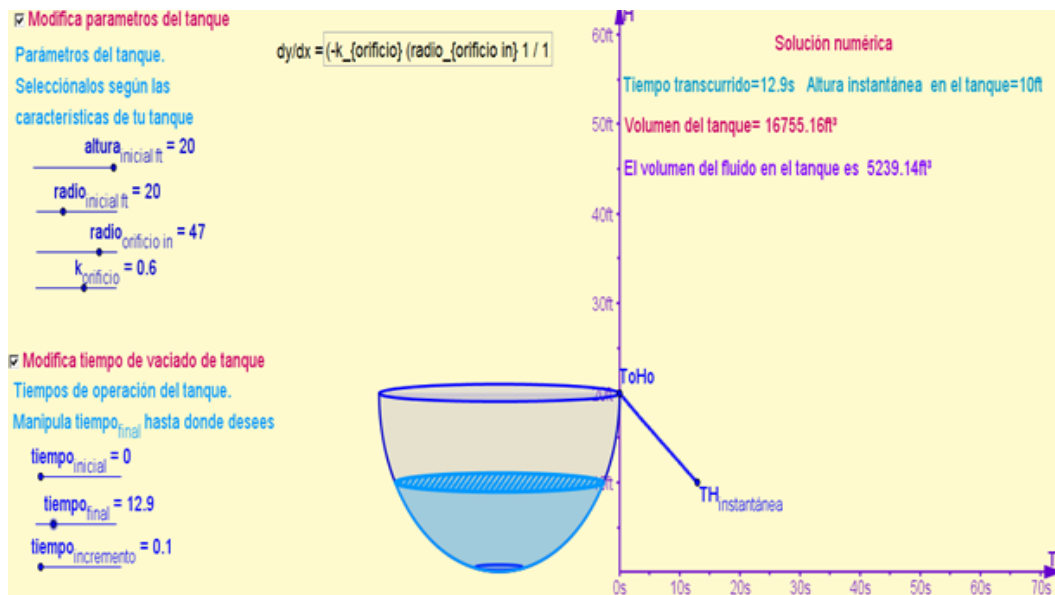


Fig. 22 Solución del problema propuesto del vaciado de un tanque semiesférico.

Los resultados que se muestran en la figura 22 se pueden comprobar analíticamente, al resolver la ecuación diferencial (14) por separación de variables.

A continuación se muestran otros diseños de tanques, que se construyen de manera similar al método mostrado en este artículo, donde su pueden manipular los parámetros de operación de los tanques para poder obtener lecturas de tiempos, volúmenes y alturas. Estos resultados se muestran en las figuras 23, 24, 25, 26, 27 y 28 para tanques con diferentes geometrías.

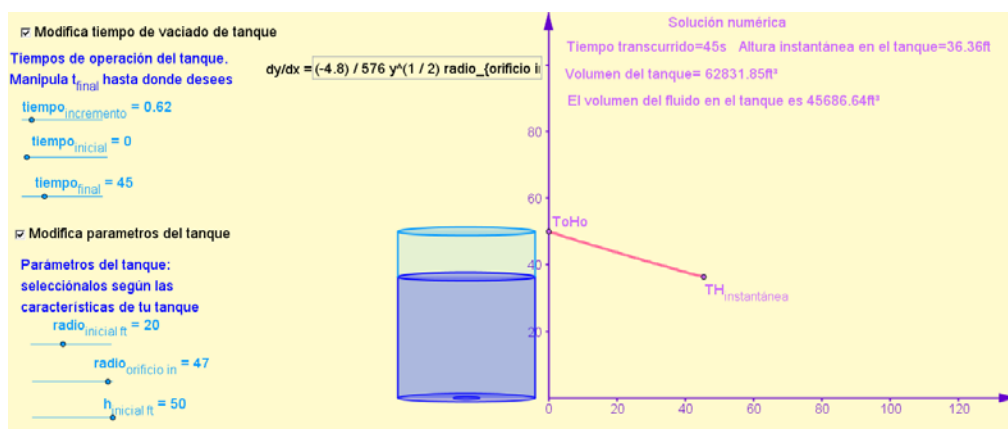


Fig. 23 Solución de un problema propuesto del vaciado de un tanque cilíndrico vertical.

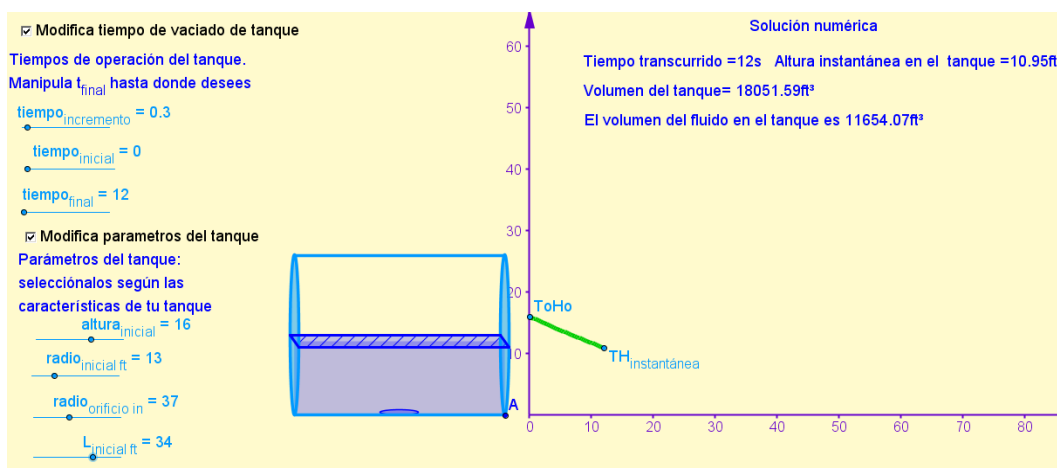


Fig. 24 Solución de un problema propuesto del vaciado de un tanque cilíndrico horizontal.

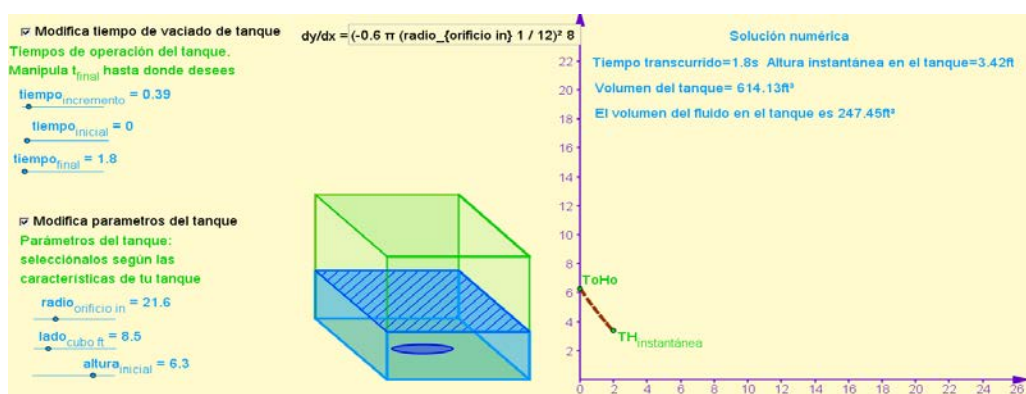


Fig. 25 Solución de un problema propuesto del vaciado de un tanque cúbico.

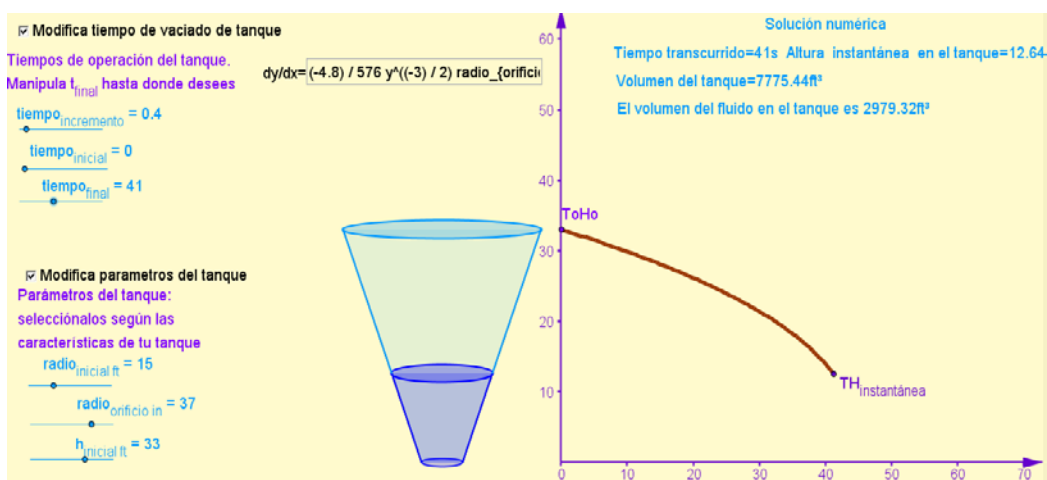


Fig. 26 Solución de un problema propuesto del vaciado de un tanque cilíndrico vertical.

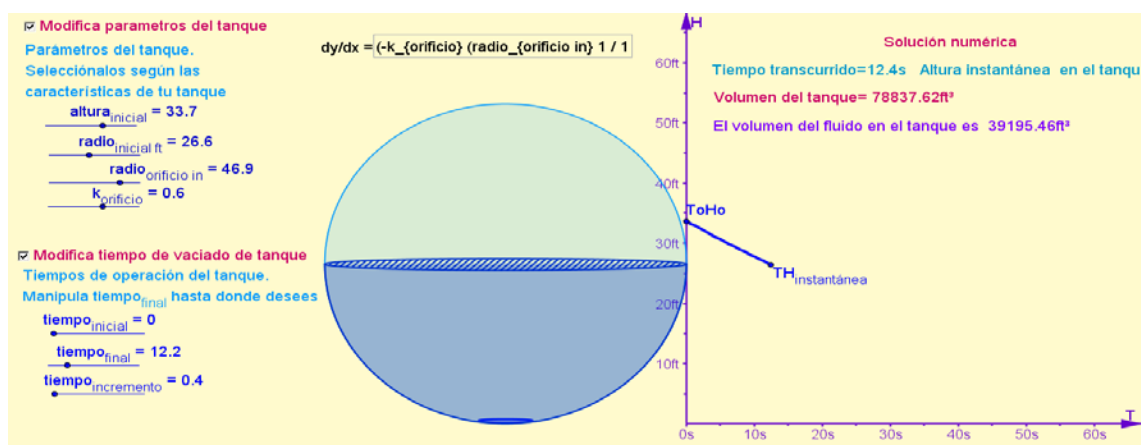


Fig. 27 Solución de un problema propuesto del vaciado de un tanque esférico.

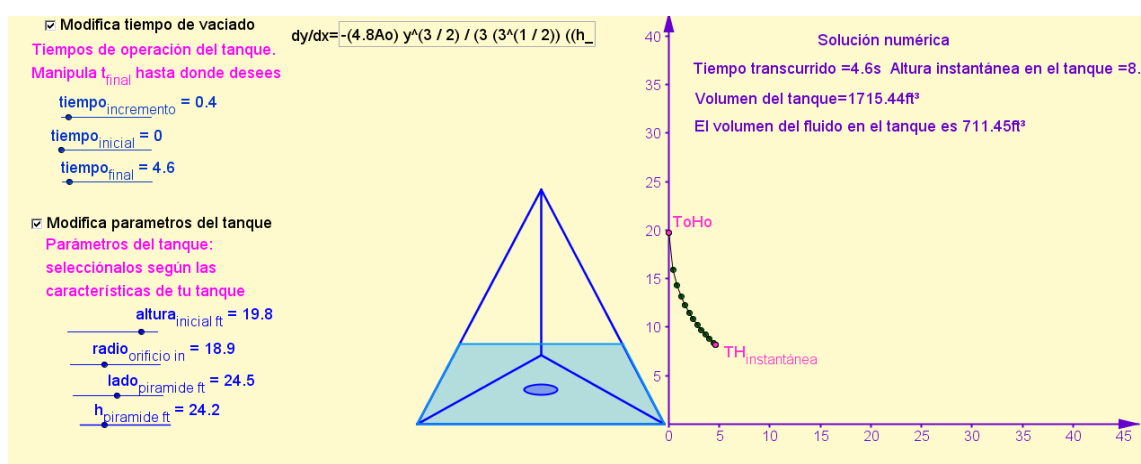


Fig. 28 Solución de un problema propuesto de vaciado de un tanque tetraédrico.

#### 4. CONCLUSIONES

El uso de applets de GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas y en particular, al mostrar las aplicaciones y resolución de problemas basados en modelos que contienen ecuaciones diferenciales, permite que los alumnos realicen una reflexión profunda en el análisis de los posibles resultados que se pueden presentar al manipular las variables de operación de un tanque con diferentes geometrías. Este software permite que los alumnos visualicen de una manera sencilla los resultados gráficos y geométricos que se obtienen con al resolver los diferentes modelos que representan las diferentes geometrías.

La metodología propuesta es sencilla, comprensible para los estudiantes, e involucra varias de las asignaturas que los estudiantes ya han abordado en sus cursos anteriores como: geometría analítica, cálculo integral, métodos numéricos y ecuaciones diferenciales.

Para un estudiante de ecuaciones diferenciales es fácil de observar la ventaja de tener programado en GeoGebra la solución de la ecuación diferencial que está manipulando, además de que en cualquier momento puede hacer la comprobación analítica de los resultados obtenidos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. Bishop; K. Clement; C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press. pp. 469-501.
- [2] Barrera, F. y Santos, M. (2001). Student's use and understanding of different mathematical representation of tasks in problem solving instruction. *Proceedings of the Twenty Three Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol.1, pp.459-466. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- [3] Cornejo, C., Villalobos, E. y Quintana, P. (2008). Métodos de solución de ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. 1ª. Edición. Editorial Reverté.
- [4] Flores, A. (1997). Soluciones geométricas a problemas de máximos y mínimos. *Miscelánea matemática*. N°26, PP. 49-57. Sociedad Matemática Mexicana.
- [5] Fuglestad, A. (2004). ICT tools and student's competence development. *Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, pp. 439-446.
- [6] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of mathematics.

- [7] Santos, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y perspectiva*, Vol. 20, pp.247-258.
- [8] Zill, D. y Cullen, M. (2009). Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera. 7ª Edición. Editorial CENGAGE Learning.